Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Cataluña 2019, Convocatoria ordinaria

mentoor.es

Sèrie 1

Ejercicio 1. Análisis

Las páginas de un libro deben tener cada una 600 cm² de superficie, con unos márgenes alrededor del texto de 2 cm a la parte inferior, 3 cm a la parte superior y 2 cm a cada lado. Calcule las dimensiones de la página que permiten la superficie impresa más grande posible.

Solución:

Las páginas de un libro deben tener cada una 600 cm² de superficie, con unos márgenes alrededor del texto de 2 cm a la parte inferior, 3 cm a la parte superior y 2 cm a cada lado. Calcule las dimensiones de la página que permiten la superficie impresa más grande posible.

Sean X e Y las dimensiones (anchura y altura) de la página. El área total de la página es constante:

$$X \cdot Y = 600 \implies Y = \frac{600}{X}$$

Las dimensiones de la superficie impresa, x e y, se obtienen restando los márgenes:

- Anchura impresa: $x = X - 2 - 2 = X - 4$.
- Altura impresa: $y = Y - 3 - 2 = Y - 5$.

El área de la superficie impresa, que queremos maximizar, es $A = x \cdot y = (X - 4)(Y - 5)$. Sustituimos Y para expresar el área impresa como una función de X:

$$A(X) = (X - 4)\left(\frac{600}{X} - 5\right) = 600 - 5X - \frac{2400}{X} + 20 = 620 - 5X - \frac{2400}{X}.$$

Para encontrar el máximo, derivamos la función $A(X)$ e igualamos a cero:

$$A'(X) = -5 + \frac{2400}{X^2}.$$

$$A'(X) = 0 \implies -5 + \frac{2400}{X^2} = 0 \implies 5X^2 = 2400 \implies X^2 = 480.$$

$$X = \sqrt{480} = \sqrt{16 \cdot 30} = 4\sqrt{30}.$$

(Descartamos la solución negativa por ser una dimensión). La segunda derivada, $A''(X) = -\frac{4800}{X^3}$, es negativa para $X > 0$, confirmando que es un máximo. Calculamos la otra dimensión de la página:

$$Y = \frac{600}{X} = \frac{600}{4\sqrt{30}} = \frac{150}{\sqrt{30}} = \frac{150\sqrt{30}}{30} = 5\sqrt{30}.$$

$$\boxed{\textbf{Las dimensiones de la página son } 4\sqrt{30} \textbf{ cm de ancho y } 5\sqrt{30} \textbf{ cm de alto.}}$$

Ejercicio 2. Álgebra

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real k:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+3y+2z=-1} \\ \boldsymbol{x+k^2y+3z=2k} \\ \boldsymbol{3x+7y+7z=k-3} \end{cases}$$

a) **Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k.**
b) **Resuelva el sistema para el caso** $\boldsymbol{k=-1}$.

Solución:

a) **Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k.**

Aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Calculamos su determinante:

$$|A| = 7k^2+27+14-(6k^2+21+21) = k^2-1.$$

$|A|=0 \iff k^2-1=0 \iff k=\pm 1.$

Caso 1: $\boldsymbol{k\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}} \implies |A|\neq 0 \implies \mathrm{Rg}(A)=3.$ **S.C.D.**

Caso 2: $\boldsymbol{k=1}$. $\mathrm{Rg}(A)=2.\ \mathrm{Rg}(A^*)=3.$ **S.I.**

Caso 3: $\boldsymbol{k=-1}$. $\mathrm{Rg}(A)=2.\ \mathrm{Rg}(A^*)=2.$ **S.C.I.**

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Si } \boldsymbol{k\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}} \implies \textbf{S.C.D.} \\ \textbf{Si } \boldsymbol{k=1} \implies \textbf{S.I.} \\ \textbf{Si } \boldsymbol{k=-1} \implies \textbf{S.C.I.} \end{array}}$$

b) **Resuelva el sistema para el caso** $\boldsymbol{k=-1}$.

Para $k=-1$, es S.C.I.

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ x+y+3z=-2 \end{cases}$$

Hacemos $z=\lambda$. Restando las ecuaciones: $2y-z=1 \implies 2y=1+\lambda \implies y=1/2+\lambda/2$.

$x=-1-3y-2z=-1-3(1/2+\lambda/2)-2\lambda=-1-3/2-3\lambda/2-2\lambda=-5/2-7\lambda/2.$

$$\boxed{\textbf{La solución es } \boldsymbol{(-5/2-7\lambda/2,1/2+\lambda/2,\lambda)},\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}.}$$

Ejercicio 3. Geometría

Un dron se encuentra en el punto $P = (2, -3, 1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más cercano del plano de ecuación $\pi : 3x + 4z + 15 = 0$.

a) Calcule la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que ha de seguir el dron. ¿Qué distancia ha de recorrer hasta llegar al plano?
b) Encuentre las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron.

Solución:

a) Calcule la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que ha de seguir el dron. ¿Qué distancia ha de recorrer hasta llegar al plano?

La trayectoria más corta es la perpendicular al plano.

El vector director de la recta será el vector normal del plano, $\vec{n} = (3, 0, 4)$.

La recta pasa por P(2,-3,1). Su ecuación paramétrica es: $r \equiv (x, y, z) = (2, -3, 1) + \lambda(3, 0, 4)$.

La distancia a recorrer es la distancia del punto P al plano π:

$$d(P, \pi) = \frac{|3(2) + 4(1) + 15|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 4 + 15|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Recta: } \ (\boldsymbol{x, y, z}) = (\mathbf{2 + 3}\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{-3, 1 + 4}\boldsymbol{\lambda}). \\ \textbf{Distancia a recorrer: 5 unidades.} \end{array}}$$

b) Encuentre las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron.

El punto de llegada, Q, es la intersección de la recta y el plano.

Sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$3(2 + 3\lambda) + 4(1 + 4\lambda) + 15 = 0 \implies 6 + 9\lambda + 4 + 16\lambda + 15 = 0 \implies 25\lambda + 25 = 0 \implies \lambda = -1.$$

Sustituimos $\lambda = -1$ en la ecuación de la recta:

$$Q = (2 + 3(-1), -3, 1 + 4(-1)) = (-1, -3, -3).$$

$$\boxed{\textbf{El punto de llegada es } \boldsymbol{Q}(\mathbf{-1, -3, -3}).}$$

Ejercicio 4. Análisis

Considere la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^3-5x+4}{1-x}}$.

a) **Calcule su dominio y estudie su continuidad. ¿Tiene alguna asíntota vertical?**
b) **Observe que** $\boldsymbol{f(-2) = -2/3, f(0) = 4}$ **y** $\boldsymbol{f(2) = -10}$. **Razone si, a partir de esta información, podemos deducir que el intervalo (-2,0) contiene un cero de la función. ¿Podemos deducirlo para el intervalo (0,2)? Encuentre un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.**

Solución:

a) **Calcule su dominio y estudie su continuidad. ¿Tiene alguna asíntota vertical?**

Dominio: $1 - x \neq 0 \implies x \neq 1$. $\boldsymbol{D = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$.

La función es continua en todo su dominio por ser un cociente de polinomios.

Tiene una asíntota vertical en $x = 1$, ya que $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{0} = \infty$.

$$\boxed{\textbf{Dominio: } \mathbb{R} \setminus \{\boldsymbol{1}\}\textbf{. A.V. en } \boldsymbol{x = 1}.}$$

b) **Observe que** $\boldsymbol{f(-2) = -2/3, f(0) = 4}$ **y** $\boldsymbol{f(2) = -10}$. **Razone si, a partir de esta información, podemos deducir que el intervalo (-2,0) contiene un cero de la función. ¿Podemos deducirlo para el intervalo (0,2)? Encuentre un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.**

Intervalo (-2,0): La función es continua en $[-2, 0]$. Como $f(-2) < 0$ y $f(0) > 0$, por el Teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe al menos un cero en $(-2, 0)$.

Intervalo (0,2): No podemos aplicar Bolzano directamente porque la función no es continua en todo el intervalo $[0, 2]$ (es discontinua en $x = 1$).

Buscamos un intervalo de enteros consecutivos con un cero. Probamos en el intervalo $(0, 1)$: $f(0) = 4 > 0$. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

Como no hay cambio de signo, probamos en $(1, 2)$: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$. $f(2) = -10 < 0$.

No podemos asegurar un cero aquí. Pero si probamos un punto intermedio, $f(0.5) > 0$.

Como $f(0) > 0$ y $\lim_{x\to 1^-} = +\infty$, y $f(-2) < 0$, la raíz está en $(-2, 0)$.

Probamos $f(-1) = \frac{-2+5+4}{2} = 3.5 > 0$. La raíz está en $(-2, -1)$.

$$\boxed{\textbf{Sí en (-2,0), no en (0,2). Un cero está en el intervalo (-2,-1).}}$$

Ejercicio 5. Álgebra

Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **en que a es un parámetro real.**

a) **Calcule para qué valores del parámetro a se satisface la igualdad** $\boldsymbol{M^2 - M - 2I = 0}$, **en que I es la matriz identidad y 0 es la matriz nula, todas ellas de orden 2.**

b) **Haciendo servir la igualdad del apartado anterior, encuentre una expresión general para calcular la matriz inversa de la matriz M y, a continuación, calcule la inversa de M para el caso** $\boldsymbol{a = \sqrt{2}}$.

Solución:

a) **Calcule para qué valores del parámetro a se satisface la igualdad** $\boldsymbol{M^2 - M - 2I = 0}$, **en que I es la matriz identidad y 0 es la matriz nula, todas ellas de orden 2.**

Primero, calculamos M^2:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, sustituimos en la ecuación dada:

$$M^2 - M - 2I = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1+a^2-1-2 & a-a-0 \\ a-a-0 & a^2-0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2 & 0 \\ 0 & a^2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para que se cumpla la igualdad, el elemento no nulo debe ser cero:

$$a^2 - 2 = 0 \implies a^2 = 2 \implies a = \pm\sqrt{2}.$$

$$\boxed{\textbf{La igualdad se satisface para } \boldsymbol{a = \sqrt{2}} \textbf{ y } \boldsymbol{a = -\sqrt{2}}.}$$

b) **Haciendo servir la igualdad del apartado anterior, encuentre una expresión general para calcular la matriz inversa de la matriz M y, a continuación, calcule la inversa de M para el caso** $\boldsymbol{a = \sqrt{2}}$.

Partimos de la igualdad $M^2 - M - 2I = 0$. Para encontrar la inversa, debemos llegar a una expresión de la forma $M \cdot (\text{algo}) = I$.

$$M^2 - M = 2I.$$

Sacamos factor común M por la izquierda:

$$M(M - I) = 2I.$$

Dividimos por 2:

$$M\left(\frac{1}{2}(M - I)\right) = I.$$

Por la definición de matriz inversa, la expresión general es $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)$.

Ahora, calculamos la inversa para el caso $a = \sqrt{2}$:

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\textbf{Expresión general: } M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)\textbf{. Para } a = \sqrt{2},\ \textbf{la inversa es } \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 6. Análisis

Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, y la recta $x = e$.

a) **Haga un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de las abscisas. Calcule las coordenadas del punto de tall de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.**

b) **Calcule el área de la región descrita en el apartado anterior.**

Solución:

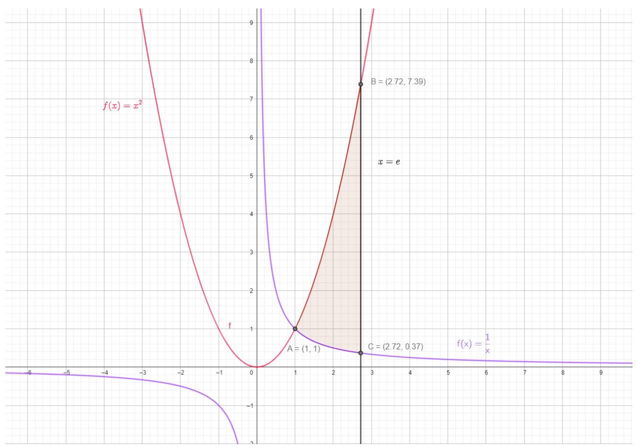
a) **Haga un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de las abscisas. Calcule las coordenadas del punto de tall de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.**

Para encontrar el punto de corte, igualamos las funciones:

$$x^2 = \frac{1}{x} \implies x^3 = 1 \implies x = 1.$$

La coordenada y es $y = 1^2 = 1$. El punto de corte es $(1, 1)$.

Esbozo:



$$\boxed{\textbf{El punto de corte es (1,1).}}$$

b) **Calcule el área de la región descrita en el apartado anterior.**

Asumiendo que el área pedida es la región comprendida entre las dos curvas desde su punto de corte $x = 1$ hasta la recta $x = e$. En el intervalo $[1, e]$, comprobamos qué función está por encima: para $x = 2$, $f(2) = 4$ y $g(2) = 1/2$, por lo que $f(x) > g(x)$.

$$\text{Área} = \int_1^e (f(x) - g(x))dx = \int_1^e \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx.$$

Calculamos la integral:

$$\left[\frac{x^3}{3} - \ln|x|\right]_1^e = \left(\frac{e^3}{3} - \ln(e)\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \ln(1)\right) = \left(\frac{e^3}{3} - 1\right) - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{4}{3}.$$

$$\boxed{\textbf{El área es } \frac{e^3 - 4}{3} \textbf{ u}^2.}$$

Sèrie 4

Ejercicio 1. Análisis

Queremos construir un marco rectangular de madera que delimite un área de 2 m². Sabemos que el precio de la madera es de 7,5 €/m para los costados horizontales y de 12,5 €/m para los costados verticales. Determine las dimensiones que ha de tener el rectángulo para que el coste total del marco sea el mínimo posible. ¿Cuál es este coste mínimo?

Solución:

Queremos construir un marco rectangular de madera que delimite un área de 2 m². Sabemos que el precio de la madera es de 7,5 €/m para los costados horizontales y de 12,5 €/m para los costados verticales. Determine las dimensiones que ha de tener el rectángulo para que el coste total del marco sea el mínimo posible. ¿Cuál es este coste mínimo?

Sean x e y las dimensiones (base y altura) del rectángulo. El área es $x \cdot y = 2$, de donde podemos despejar $y = 2/x$.

El coste total del marco viene dado por el coste de los cuatro lados:

$$C = \text{Coste horizontales} + \text{Coste verticales} = (2x \cdot 7.5) + (2y \cdot 12.5) = 15x + 25y.$$

Sustituimos y para expresar el coste como una función de x:

$$C(x) = 15x + 25\left(\frac{2}{x}\right) = 15x + \frac{50}{x}.$$

Para minimizar el coste, derivamos e igualamos a cero:

$$C'(x) = 15 - \frac{50}{x^2}.$$

$$C'(x) = 0 \implies 15 = \frac{50}{x^2} \implies x^2 = \frac{50}{15} = \frac{10}{3} \implies x = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

La segunda derivada, $C''(x) = \frac{100}{x^3}$, es positiva para $x > 0$, confirmando un mínimo.

Calculamos las dimensiones y el coste:

$$x = \frac{\sqrt{30}}{3} \text{ m.}$$

$$y = \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{10/3}} = 2\sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{2\sqrt{30}}{10} = \frac{\sqrt{30}}{5} \text{ m.}$$

$$C_{min} = 15\left(\frac{\sqrt{30}}{3}\right) + 50\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right) = 5\sqrt{30} + \frac{50\sqrt{30}}{10} = 5\sqrt{30} + 5\sqrt{30} = 10\sqrt{30}.$$

$$\boxed{\textbf{Dimensiones: } \frac{\sqrt{30}}{3} \times \frac{\sqrt{30}}{5} \textbf{ m. Coste mínimo: } 10\sqrt{30} \approx 54.77.}$$

Ejercicio 2. Geometría

Sean la recta $r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ **y el pla** $\pi : x - z = 3$.

a) **Calcule la ecuación paramétrica de la recta que es perpendicular al pla** π **y que el talla en el mismo punto en que el talla la recta r.**

b) **Encuentre los puntos de r que están a una distancia de** $\sqrt{8}$ **unidades del pla** π.

Solución:

a) **Calcule la ecuación paramétrica de la recta que es perpendicular al pla** π **y que el talla en el mismo punto en que el talla la recta r.**

Primero, encontramos el punto de intersección, P, de la recta r y el plano π.

De la recta r, sabemos que $x = 2$ y $y = z + 1$. Sustituimos en la ecuación del plano:

$$(2) - z = 3 \implies z = -1.$$

Con $z = -1$, encontramos el resto de coordenadas: $x = 2$, $y = -1 + 1 = 0$. El punto de intersección es $P(2, 0, -1)$.

La nueva recta, s, es perpendicular a π, por lo que su vector director, $\vec{v}_s$, es el vector normal del plano, $\vec{n}_\pi = (1, 0, -1)$.

La recta s pasa por $P(2, 0, -1)$ y tiene $\vec{v}_s = (1, 0, -1)$.

$$\boxed{\textbf{La ecuación paramétrica es } (x, y, z) = (2, 0, -1) + \lambda(1, 0, -1).}$$

b) **Encuentre los puntos de r que están a una distancia de** $\sqrt{8}$ **unidades del pla** π.

Un punto genérico de la recta r, P_r, se puede escribir en forma paramétrica.

De $r: \begin{cases} x = 2 \\ y = z + 1 \end{cases}$, si hacemos $z = t$, el punto genérico es $P_r(2, t + 1, t)$.

La distancia de P_r a $\pi : x - z - 3 = 0$ debe ser $\sqrt{8}$:

$$d(P_r, \pi) = \frac{|(2) - (t) - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|-t-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}.$$

$|-t-1| = \sqrt{16} \implies |t + 1| = 4.$

Esto nos da dos soluciones: $t + 1 = 4 \implies t = 3$. $t + 1 = -4 \implies t = -5$.

Para $t = 3$, el punto es $Q_1(2, 4, 3)$. Para $t = -5$, el punto es $Q_2(2, -4, -5)$.

$$\boxed{\textbf{Los puntos son } (2, 4, 3) \textbf{ y } (2, -4, -5).}$$

Ejercicio 3. Álgebra

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + 7y + 5z = 0} \\ \boldsymbol{x + ay + z = 3} \\ \boldsymbol{y + z = -2} \end{cases}$$

a) **Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a.**
b) **Resuelva el sistema para el caso $\boldsymbol{a = 2}$.**

Solución:

a) **Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a.**

$A = \begin{pmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$|A| = a(a-1) - 7(1) + 5(1) = a^2 - a - 2.$

$|A| = 0 \iff a^2 - a - 2 = 0 \iff a = 2, a = -1.$

Caso 1: $\boldsymbol{a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3.$ **S.C.D.**

Caso 2: $\boldsymbol{a = -1}$. $\text{Rg}(A) = 2$. $\text{Rg}(A^*) = 3$. **S.I.**

Caso 3: $\boldsymbol{a = 2}$. $\text{Rg}(A) = 2$. $\text{Rg}(A^*) = 2$. **S.C.I.**

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Si } \ \boldsymbol{a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}} \implies \textbf{S.C.D.} \\ \textbf{Si } \ \boldsymbol{a = -1} \implies \textbf{S.I.} \\ \textbf{Si } \ \boldsymbol{a = 2} \implies \textbf{S.C.I.} \end{array}}$$

b) **Resuelva el sistema para el caso $\boldsymbol{a = 2}$.**

Para $a = 2$ es S.C.I. $\begin{cases} 2x + 7y + 5z = 0 \\ x + 2y + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$.

De la tercera, $y = -2 - z$. Sustituyendo en la segunda: $x + 2(-2 - z) + z = 3 \implies x - 4 - 2z + z = 3 \implies x - z = 7 \implies x = z + 7$. Haciendo $z = \lambda$:

$$\boxed{\textbf{La solución es } \boldsymbol{(7 + \lambda, -2 - \lambda, \lambda)}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Ejercicio 4. Análisis

Considere la función $f(x)$, que depende de los parámetros reales n y m y es definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{nx} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) **Calcule los valores de n y m para que la función sea contínua en todo el conjunto de los números reales.**

b) **Para el caso $n = -4$ y $m = -6$, calcule el área de la región limitada por la gráfica de f(x), el eje de las abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.**

Solución:

a) **Calcule los valores de n y m para que la función sea contínua en todo el conjunto de los números reales.**

Continuidad en x=0: $f(0) = e^0 = 1$. $\lim_{x\to 0^+}(\frac{x^2}{4} + n) = n$. Por tanto, $n = 1$. **Continuidad en x=2:** $f(2) = \frac{2^2}{4} + n = 1 + n$. $\lim_{x\to 2^+}(\frac{3x}{2} + m) = 3 + m$. $1 + n = 3 + m \implies 1 + 1 = 3 + m \implies m = -1$.

$$\boxed{\boldsymbol{n = 1, m = -1}.}$$

b) **Para el caso $n = -4$ y $m = -6$, calcule el área de la región limitada por la gráfica de f(x), el eje de las abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.**

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} - 4 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} - 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. El área es $\int_0^4 |f(x)|dx$. En $(0,2)$, $f(x)$ es negativa. En $(2,4)$, $f(x)$ es negativa. La raíz de $\frac{3x}{2} - 6 = 0$ es $x = 4$.

$$A = \int_0^2 -(\frac{x^2}{4} - 4)dx + \int_2^4 -(\frac{3x}{2} - 6)dx$$

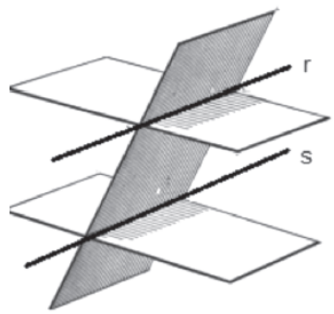
$$= \left[-\frac{x^3}{12} + 4x\right]_0^2 + \left[-\frac{3x^2}{4} + 6x\right]_2^4 = (-\frac{8}{12} + 8) + ((-12 + 24) - (-3 + 12)) = \frac{22}{3} + 3 = \frac{31}{3}.$$

$$\boxed{\textbf{El área es } \frac{\mathbf{31}}{\mathbf{3}} \textbf{ u}^{\mathbf{2}}.}$$

Ejercicio 5. Geometría

Considere los planos $\pi_1 : 2x + ay + z = 5$, $\pi_2 : x + ay + z = 1$ y $\pi_3 : 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0$, en que a es un parámetro real.

a) **Estudie para qué valores del parámetro a los tres planos se cortan en un punto.**
b) **Compruebe que para el caso $a = 1$ la interpretación geométrica del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es la que se muestra en la imagen siguiente:**



Solución:

a) **Estudie para qué valores del parámetro a los tres planos se cortan en un punto.**

Para que los tres planos se corten en un único punto, el sistema de ecuaciones debe ser Compatible Determinado (S.C.D.).

Esto ocurre cuando el determinante de la matriz de coeficientes A es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = 2(a(a+1) - (a+1)) - a(a+1-2) + 1(a+1-2a)$$

$$= 2(a^2-1) - a(a-1) + (-a+1) = (a-1)(2(a+1) - a - 1) = (a-1)(2a+2-a-1) = (a-1)(a+1).$$

El determinante es cero si $a = 1$ o $a = -1$. Por tanto, los planos se cortan en un punto si $a \neq 1$ y $a \neq -1$.

$$\boxed{\textbf{Los planos se cortan en un único punto para } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.}$$

b) **Compruebe que para el caso $a = 1$ la interpretación geométrica del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es la que se muestra en la imagen siguiente:**

Para $a = 1$, el sistema es: $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$.

Analizamos la posición relativa de los planos dos a dos: $\vec{n}_1 = (2,1,1)$, $\vec{n}_2 = (1,1,1)$, $\vec{n}_3 = (2,2,2)$.

Planos π_2 y π_3: $\vec{n}_3 = 2\vec{n}_2$. Sus vectores normales son proporcionales, por lo que son paralelos. Como la ecuación de π_3 $(x + y + z = 0)$ no es proporcional a la de π_2 $(x + y + z = 1)$, son **paralelos y distintos**.

Plano $\boldsymbol{\pi_1}$ con $\boldsymbol{\pi_2}$ y $\boldsymbol{\pi_3}$: El vector $\vec{n}_1$ no es proporcional a $\vec{n}_2$ ni a $\vec{n}_3$. Por tanto, el plano π_1 es **secante** a los otros dos.

La situación geométrica es la de dos planos paralelos (π_2, π_3) cortados por un tercer plano (π_1), lo que produce dos rectas de intersección paralelas (r y s en la figura). Esto coincide con la imagen.

Queda comprobado, ya que para a=1 los planos $\boldsymbol{\pi_2}$ y $\boldsymbol{\pi_3}$ son paralelos y $\boldsymbol{\pi_1}$ es secante a ambos.

Ejercicio 6. Análisis

Sabemos que una función $f(x)$ es contínua y derivable en todos los números reales, que tiene como segunda derivada $f''(x) = 6x$ y que la recta tangent en el punto de abscisa $x = 1$ es horizontal.

a) **Determine la abscisa de los puntos de inflexión de la función f y los intervalos de concavidad y convexidad. Justifique que la función f tiene un mínimo relativo en $x = 1$.**
b) **Sabiendo, además, que la recta tangent en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5$, calcule la expresión de la función f.**

Solución:

a) **Determine la abscisa de los puntos de inflexión de la función f y los intervalos de concavidad y convexidad. Justifique que la función f tiene un mínimo relativo en $x = 1$.**

Los puntos de inflexión se encuentran donde $f''(x) = 0$.

$$6x = 0 \implies x = 0.$$

Estudiamos el signo de $f''(x)$ alrededor de $x = 0$: Si $x < 0$, $f''(x) < 0 \implies$ Cóncava hacia abajo ($\cap$). Si $x > 0$, $f''(x) > 0 \implies$ Cóncava hacia arriba ($\cup$). Hay un cambio de concavidad, por tanto, hay un **punto de inflexión en $x = 0$**.
Para justificar el mínimo en $x = 1$, usamos el criterio de la segunda derivada. Se nos dice que la tangente en $x = 1$ es horizontal, lo que implica $f'(1) = 0$. Evaluamos $f''(1) = 6(1) = 6 > 0$. Como $f'(1) = 0$ y $f''(1) > 0$, se confirma que la función tiene un **mínimo relativo en $x = 1$**.

$$\boxed{\textbf{P. de inflexión en } x = 0.\ \textbf{Cóncava en } (-\infty, 0) \textbf{ y Convexa en } (0, \infty).\ \textbf{Mín. relativo en } x = 1.}$$

b) **Sabiendo, además, que la recta tangent en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5$, calcule la expresión de la función f.**

La recta tangente $y = 5$ nos da dos datos:
- La pendiente es 0, por lo que $f'(1) = 0$ (ya lo sabíamos).
- El punto de tangencia es $(1, 5)$, por lo que $f(1) = 5$.

Integramos $f''(x)$ para encontrar $f'(x)$:

$$f'(x) = \int 6x dx = 3x^2 + C_1.$$

Usamos $f'(1) = 0$: $3(1)^2 + C_1 = 0 \implies C_1 = -3$. Así, $f'(x) = 3x^2 - 3$.
Integramos $f'(x)$ para encontrar $f(x)$:

$$f(x) = \int (3x^2 - 3) dx = x^3 - 3x + C_2.$$

Usamos $f(1) = 5$: $(1)^3 - 3(1) + C_2 = 5 \implies 1 - 3 + C_2 = 5 \implies C_2 = 7$.

$$\boxed{\textbf{La expresión de la función es } f(x) = x^3 - 3x + 7.}$$